引文格式:刘子奇,臧欣蕊,贾春,等.固定基线约束的低成本GNSS测向方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(7):1321-1327.DOI:10.13203/j.whugis20220572

Citation:LIU Ziqi,ZANG Xinrui,JIA Chun,et al.Low-Cost GNSS Heading Determination with Fixed Baseline Constraints[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2025,50(7):1321-1327.DOI:10.13203/j.whugis20220572

固定基线约束的低成本GNSS测向方法

刘子奇[1,2,3] 臧欣蕊[1] 贾 春[1,2] 李 阳[1] 于宛灵[1]

1 哈尔滨工程大学智能科学与工程学院,黑龙江 哈尔滨,150001

2 中国船舶航海保障技术实验室,天津,300131

3 中国舰船研究设计中心,湖北 武汉,430064

摘 要:全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)测向是导航领域提供航向信息的重要手段。高性能GNSS测向产品精度可达0.20°/m,满足多数应用领域的需求,但其高昂的万元级成本阻碍了大众市场推广。而低成本GNSS接收机的观测量冗余度与质量均弱于高性能GNSS接收机,导致其测向精度与可靠性易受复杂环境影响。为提升低成本GNSS测向性能,提出了固定基线约束的低成本GNSS测向方法。该方法利用双天线间固定基线约束信息,基于几何基线后验方差-协方差信息构建实时动态检验阈值,可有效增加整周模糊度解算成功率,从而提升低成本GNSS测向的精度与可靠性。通过实测动态数据对所提方法进行测试,与传统方法对比,整周模糊度固定成功率提升了7.4%,达到了0.40°/m的测向精度。

关键词:低成本测向;GNSS测向法;基线约束;整周模糊度解算

中图分类号:P228 **文献标识码**:A **收稿日期**:2023-11-22

DOI:10.13203/j.whugis20220572 **文章编号**:1671-8860(2025)07-1321-07

Low-Cost GNSS Heading Determination with Fixed Baseline Constraints

LIU Ziqi[1,2,3] *ZANG Xinrui*[1] *JIA Chun*[1,2] *LI Yang*[1] *YU Wanling*[1]

1 School of Intelligent Science and Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

2 Laboratory of Science and Technology on Marine Navigation and Control, Tianjin 300131, China

3 China Ship Development and Design Center, Wuhan 430064, China

Abstract: **Objectives**: Global navigation satellite system (GNSS) heading determination is an important technology in the field of navigation. At present, the accuracy of high-performance GNSS heading determination receivers can reach 0.2°/m, which can satisfy the requirements of most applications, but the cost of 10 000 yuan hinders the mass market promotion. However, the observation redundancy and quality of the low-cost GNSS receivers are weaker than those of the high-performance GNSS receiver, which makes the heading determination accuracy and reliability of the low-cost GNSS receiver vulnerable to complex environments. **Methods**: In order to improve the performance of low-cost GNSS heading determination, a low-cost GNSS heading determination method with fixed baseline constraints is proposed. The method deploys fixed baseline constraints between the dual antennas and constructs real-time dynamic detection thresholds based on a posteriori variance-covariance of geometric baseline, which can effectively increase the success rate of integer ambiguity resolution, thus improving the accuracy and reliability of low-cost GNSS heading determination. **Results**: The proposed method was tested with real kinematic data. Compared to the traditional methods, the success rate of the integer ambiguity resolution was improved by 7.4%, and the heading determination accuracy of 0.40°/m was achieved. **Conclusions**: It is shown that the low-cost GNSS vectoring

基金项目:国家重点研发计划(2021YFB3901300);国家自然科学基金(61773132,61633008,61803115,62003109);工业和信息化部145项高技术船舶创新项目;黑龙江省杰出青年科研基金(YQ2020F009);中央高校基本科研业务费专项资金(3072022JC0401,3072019CF0401,3072020CFT0403);中国船舶航海保障技术实验室开放基金(2022010103)。

第一作者:刘子奇,硕士,研究方向为卫星导航定位技术与人工智能技术。Liuziqi010528@163.com

通信作者:贾春,讲师。jiachun@hrbeu.edu.cn

method with fixed baseline constraints can effectively increase the success rate of whole-period ambiguity solution and improve the accuracy and reliability of low-cost GNSS vectoring.

Key words: low-cost heading determination; GNSS heading determination method; baseline constraints; integer ambiguity resolution

全球导航卫星系统(global navigation satellite system, GNSS)测向技术是提供航向信息的重要手段之一,在海陆空天领域具有重要的实用价值[1-3]。其通过在载体上安装已知固定基线的GNSS双天线,通过动态差分定位技术获得厘米至毫米级精度的相对定位结果,利用几何投影获得载体的精准航向角信息[4-5]。

当前,市场主流的GNSS测向设备,如Novatel OEM718D、Trimble BD982、和芯星通UB482等,加之双天线配置,成本已达万元以上,限制了其在大众消费市场中普及推广。因此,GNSS测向设备研发方向逐步趋于低成本和小型化[6]。在硬件层面上,低成本GNSS接收机板卡在时钟精度、信号通道数、可用信号频率、信号处理精细程度等方面均弱于高性能GNSS接收机板卡[7-8],导致低成本GNSS接收机可用观测量较少,观测量噪声较大,尤其是在城市等复杂环境下,观测量质量更难以保障,严重影响了GNSS测向精度与可靠性[9]。因此,在低成本GNSS硬件条件下,通过升级与改进测向算法实现高精度与高可靠的低成本GNSS测向成为未来发展趋势[10-12]。

针对GNSS测向方法的众多研究中,区别于GNSS精密定位技术的优势在于存在已知固定基线作为约束[13-15]。目前,该方向的研究主要包含有:(1)首先将固定基线长度执行线性化处理,然后构建与基线估计量相关的函数方程,从而作为虚拟观测量提升模型强度。该方法需要天线间具有较大的基线距离,否则线性化误差可能会引入模型误差,反而会造成模型估计有偏,弱化测向精度[16-17]。通常情况下,受到运载体安装限制,双天线固定基线长度一般不会超过10 m,这使得该方法优势难以发挥效能。(2)将固定基线长度约束信息作为整周模糊度正确性检验的依据,保障整周模糊度解算正确性,从而间接保障测向精度与可靠性[13,18]。目前选用检验阈值常依赖于经验值,使得该类方法难以较好地适用于动态应用场景。(3)利用已知固定基线长度约束信息重构最小代价函数,调整整周模糊度搜索准则,典型方法为附有基线长度约束的最小二乘模糊度去相关(least-squares ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA)算法[19]。该方法调整了搜索准则,导致搜索复杂程度提升,在设备算力有限且对实时性要求较高的情况下难以发挥作用[20]。

综合对比上述方法,利用已知固定基线长度评估整周模糊度正确性是最为简单且有效的保障GNSS测向精度与可靠性的方法,但针对低成本GNSS接收机观测量质量较差、场景多变等干扰条件,如何确定检验阈值成为研究的重点。本文提出了一种固定基线约束的低成本GNSS测向方法,在低成本GNSS测向设备运行条件下取得较好的测向性能。

1 方法原理

对于GNSS测向技术而言,受载体安装限制,双天线基线间距离一般在10 m以内,天线间电离层与对流层延迟误差具有强相关特性,通过观测量站间与星间双差操作,能够有效消除电离层与对流层延迟误差[21]。因此,在动态差分定位模型构建中忽略了电离层与对流层延迟影响,模型方程表示为:

$$\begin{cases} E(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\phi})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}\end{bmatrix} \\ D(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\phi})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{pp} & 0\\ 0 & \boldsymbol{Q}_{\phi\phi}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{1}$$

式中,$E(\ )$表示随机变量的期望;$D(\ )$表示随机变量的方差;$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{\phi}$分别表示伪距与载波相位站间-星间双差观测量,对应的观测量方差-协方差分别表示为$\boldsymbol{Q}_{pp}$与$\boldsymbol{Q}_{\phi\phi}$;$\boldsymbol{b}$表示几何基线向量,对应的设计矩阵为$\boldsymbol{H}$;$\boldsymbol{z}$表示整周模糊度待估参数,对应的设计矩阵为$\boldsymbol{\Lambda}$。

根据式(1),利用平差估计理论可以求解得到几何基线浮点解列向量$\hat{\boldsymbol{b}}$与相应方差-协方差$\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{b}}$,以及整周模糊度浮点解列向量$\hat{\boldsymbol{z}}$与相应方差-协方差$\boldsymbol{Q}_{\hat{z}\hat{z}}$,其中几何基线与整周模糊度间的方差-协方差为$\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{z}}$。

借助整周模糊度浮点解列向量$\hat{\boldsymbol{z}}$与相应方差-协方差$\boldsymbol{Q}_{\hat{z}\hat{z}}$,采用LAMBDA算法,可以获得整周模糊度的固定解$\check{\boldsymbol{z}}$。如果整周模糊度固定正确,通过贝叶斯后验理论,可以得到厘米甚至毫米级精度几何基线解$\check{\boldsymbol{b}}$及相应的方差-协方差$\boldsymbol{Q}_{\check{b}\check{b}}$:

$$\check{\boldsymbol{b}}=\hat{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{z}}\boldsymbol{Q}_{\hat{z}\hat{z}}^{-1}(\hat{z}-\check{z}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\check{b}\check{b}}=\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{b}}-\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{z}}\boldsymbol{Q}_{\hat{z}\hat{z}}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{z}}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

将上述求解的精准几何基线解$\check{\boldsymbol{b}}$投影到当地坐标系，根据几何投影理论，可以得到航向角φ，如图 1 所示。

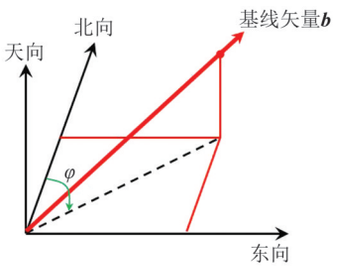


图 1　航向角解算示意图

Fig. 1　Diagram of Heading Determination

在低成本 GNSS 接收机观测量质量较差、动态场景多变等干扰条件下，如何保障整周模糊度解算成功率是能否获得厘米甚至毫米级精度的几何基线的关键，也是保障 GNSS 测向的基础。主流方法采用 LAMBDA 算法，以模糊度残差方差最小为代价函数，先求解获得两组备选解，分别为最优与次优备选解$\check{z}_1$与$\check{z}_2$，然后通过最优与次优备选解差异性检验，判定是否接受最优解作为最终的固定解[22]。传统 LAMBDA 默认只将最优解作为判定对象，如通过检验则接受最优解，如未通过检验则判定固定失败。事实上，由于低成本 GNSS 接收机观测量较差，LAMBDA 算法固定的最优解可能并不是正确解，其正确解可能是其他备选解，从而造成整周模糊度固定失败，这在一定程度上破坏了 GNSS 测向的连续性。因此，本文采取的有效策略如下：

依然采用 LAMBDA 算法实施整周模糊度备选解搜索，但不同于传统方法仅确定最优与次优两组解，而是按照整周模糊度残差二次型大小排序依次搜索出n组备选模糊度解$\check{z}_k, k\in[1,n]$组成备选集合，其中k取值越小，表明其整周模糊度残差二次型越小[22]。n取值与观测量质量相关，一般观测量质量高的场景，不受观测噪声和偏差干扰，整周模糊度残差二次型越小，越可能是正确解，所以n可以取较小值，保障正确解能够包含在备选集合内。但随着观测量质量降低，噪声或偏差干扰导致数据与模型一致性较差，因此有必要适当增加n值，确保正确解包含在备选集合中。然而，n值取值过大可能会带来计算负担，所以在实际情况下n值通常会在 5～100 范围内选择。在n组模糊度集合中包含有正确整周模糊度解的概率为：

$$P(a)=\sum_{k=1}^{n}P(a_k) \tag{4}$$

式中，$P(a_k)$表示a_k是正确整周模糊度的概率，其中a_k为第k个备选解。由式(4)可知，在更多备选解中确定固定解，可以有效增加获得正确整周模糊度的概率。

尽管上述策略能够潜在提升获得正确整周模糊度的概率，但提升 GNSS 测向精度与可靠性的基本保障在于如何在备选解集合中搜索出正确的备选解。针对该问题，本文充分利用了已知固定基线约束信息，构建了以下判定准则，在备选解集合中选择最终的固定解：

$$\left|\sqrt{\left(\check{\boldsymbol{b}}_k\right)^{\mathrm{T}}\check{\boldsymbol{b}}_k}-b_0\right|\leqslant T_h \tag{5}$$

式中，b_0表示已知固定基线长度；T_h为检验阈值；$\check{\boldsymbol{b}}_k=\hat{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{Q}_{\hat{b}\hat{z}}\boldsymbol{Q}_{\hat{z}\hat{z}}^{-1}(\hat{z}-\check{z}_k)$，使$k$在 1～$n$中从小到大进行搜索，一旦满足式(5)要求，则停止搜索，将该备选解作为最终固定解，参与修正几何基线。

对于检验阈值而言，传统方法考虑到相位噪声一般为 3 mm，根据 3σ原则，会将T_h=1 cm 作为检验阈值[14]。然而，采用固定阈值将会难以适用于不同动态场景，直接影响 GNSS 在实际环境中的测向精度与可靠性。为了能够适应于不同动态场景，需要动态调整检验阈值，本文根据式(2)描述的几何基线后验方差-协方差方程构建了动态调整的检验阈值为：

$$T_h=\sqrt{\left[\mathrm{sum}\left(\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{Q}_{\check{b}\check{b}}\right)\right)\right]} \tag{6}$$

式中，diag( )求主对角线元素；sum( )求所有元素和。根据式(6)可知，该检验阈值实质会与不同观测量噪声、卫星几何构型、解算模型构建等因素相关。

综上，面对将固定基线长度约束信息作为整周模糊度正确性检验的传统方法，针对检验阈值选择经验固定值难以适用于动态场景的问题，本文提出了动态实时调整检验阈值的方法，有望有效提高测向方法的整周模糊度解算成功率，改善低成本 GNSS 的测向精度与可靠性，更好地满足低成本接收机双天线测向技术在实际中的应用需求。

2　低成本 GNSS 测向实验与分析

为了验证本文方法性能，采用两个 Ublox M8T 低成本接收机形成固定基线为 2.8 m 的双天

线配置,安装在皮划艇的两端,其设备成本在百元级别,以5 Hz的采样率在英国苏塞克斯附近的海洋中进行实测采集GPS原始观测量,截取时间长度约为20 min,共6 000个历元,其数据下载地址为http://rtkexplorer.com/。测试时间段内卫星云图如图2所示。图3给出了测试中航向角的变化结果。由图3可知,航向角变化过程中存在部分弧段的航向角阶跃变化情况,其原因在于航向角变化范围为±180°,如超过该范围会强行通过加减360°来调整到指定范围内。因此,图3中出现阶跃现象是邻近±180°出现航向角强行调整导致的。

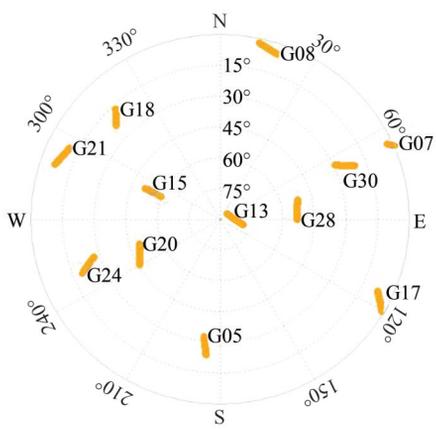


图2 测试时间段卫星云图

Fig. 2 Satellite Sky in the Test Time

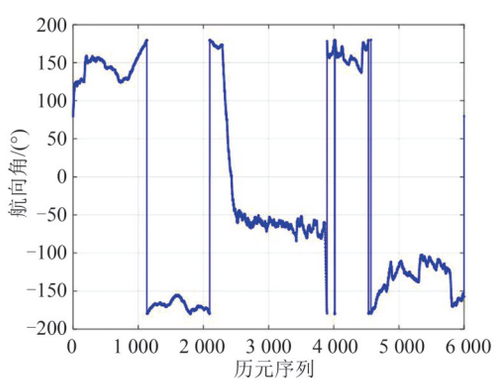


图3 测试中航向变化值

Fig. 3 Heading Value in the Test

为了测试本文方法性能,选用了两种传统方法作为对比:(1)传统LAMBDA算法,选择最优备选解(即整周模糊度方差残差最小对应的备选解)作为固定解,记为LAMBDA法;(2)在传统LAMBDA法基础上,引入已知固定基线长度约束准则来搜索备选解作为固定解。该方法会利用已知固定基线长度约束准则对备选解集进行初筛,在满足基线长度约束的备选解集内寻找整周模糊度方差残差最小对应的备选解作为固定解。根据式(5)基线长度代价函数,需要确定检验阈值,传统策略考虑到相位观测量精度为3 mm,造成的基线估计量不超过1 cm,故采用1 cm作为经验固定检验阈值,该方法在文中记为LAMBDA+LT。而本文方法在LAMBDA+LT方法的基础上实施改进,考虑在确定检验阈值时采用经验固定值,很难适应于实际动态场景,因此提出采用后验修正后的几何基线方差-协方差矩阵构建实时动态检验阈值,从而保障检验阈值能够适应实时动态场景,记为LAMBDA+LN。LAMBDA+LT与LAMBDA+LN两种方法需要预先利用LAMBDA法建立备选解集,考虑到测试使用的数据观测量质量较好,且提高计算效率的情况下,测试设置的构建模糊度备选解集的数量$n=5$。为了测试3种方法的测向性能,主要从整周模糊度固定成功率与测向精度两个角度进行综合分析,其测试数据的参考值来源于商业软件的事后处理结果。

图4给出了LAMBDA法的航向误差结果。当整周模糊度固定成功,其航向精度可达到1°以内,但是整周模糊度一旦固定错误,其航向精度弱化严重,误差甚至达到10°以上。

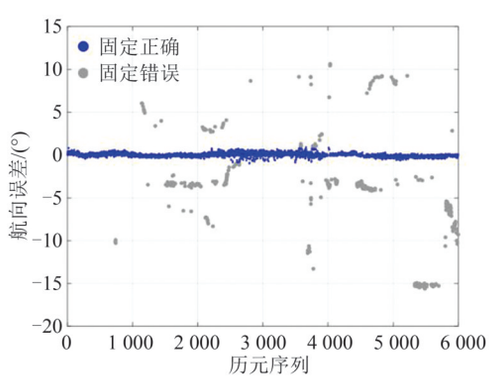


图4 LAMBDA法航向误差结果

Fig. 4 LAMBDA Method Heading Error Results

图5给出了LAMBDA+LT的航向误差结果,对应的基线长度残差、检验阈值以及整周模糊度固定的索引值等状态信息展示在图6中。需要注意的是,整周模糊度固定的备选索引值表明是在模糊度备选集合中,挑选出符合式(5)的最优整周模糊度备选解,将其作为固定解用于后续模型解算,其中红色星号表示为该固定解在整个备选集合中对应的索引值。

对比图4与图5,LAMBDA+LT法的整周模糊度固定错误数量明显多于LAMBDA法,主要原因在于引入了已知固定基线约束准则,由于

检验阈值选择过小,导致了原本正确的整周模糊度因无法通过已知固定基线约束准则而被剔除,从而造成了整周模糊度固定错误增多。由图 6 可知,受动态环境影响,观测量质量不一致会造成基线长度残差变化较大,如直接采用固定的检验阈值,将会造成大量超限,错误地选择其他备选解,导致较多的整周模糊度固定错误,影响航向定位精度。

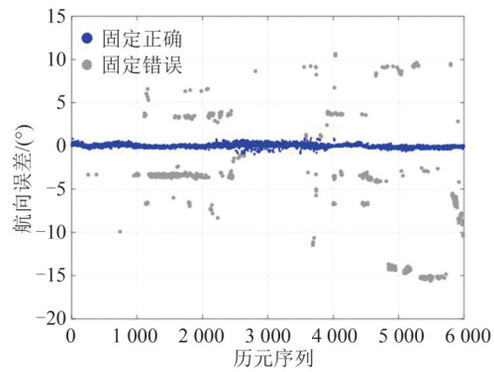


图 5　LAMBDA+LT 法航向误差结果

Fig. 5　LAMBDA+LT Method Heading Error Results

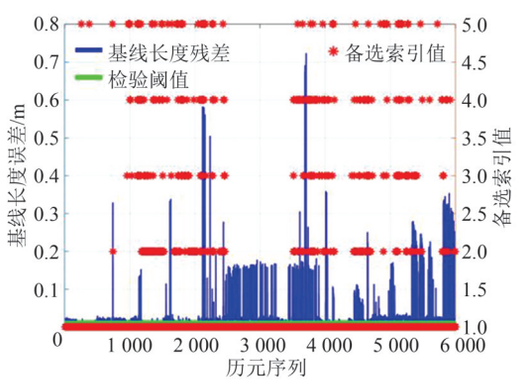


图 6　LAMBDA+LT 法的状态信息

Fig. 6　LAMBDA+LT Method Status Information

图 7 给出了 LAMBDA+LN 的航向误差结果,对应的基线长度残差、检验阈值以及整周模糊度固定的索引值等状态信息展示在图 8 中。由于该方法采用了与模型相关的实时动态检验阈值构建策略,从而降低了动态环境对其的影响。对比图 5 与图 7 也可以看出,所提方法显著提升了整周模糊度固定成功率,较好地提升了测向精度。由图 8 可知,由于引入了几何固定基线约束准则,使得模型并不只关注于第 1 组备选解,而是在其他备选解中搜索既能满足几何固定基线约束准则,又能具有较小的整周模糊度残差二次型的解,从而搜索得到正确的备选解。由图 8 中模糊度固定的备选索引值结果可知,正确的整周模糊度解并不是第 1 组整周模糊度残差二次型最小的最优解,而是其他备选解,这也是帮本文方法能够较传统 LAMBDA 法提升整周模糊度解算成功率的关键,因为传统 LAMBDA 法只认可最优解,如未通过检验,则判定整周模糊度解算失败。但由图 8 可知,该阈值变化幅值变化较小,其主要原因在于测试过程中可利用的数据长度较短,观测量噪声、卫星几何构型等因素变化较小导致的。由于检验阈值是随式(6)实时计算的,并未通过经验值给定,仍可以表现出更好的适用性,一定程度上也能反映该方法性能比 LAMBDA+LT 方法更好。

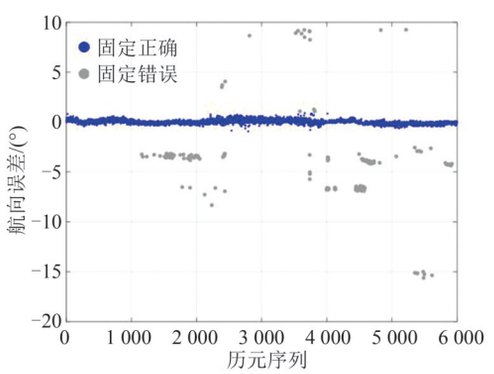


图 7　LAMBDA+LN 法航向误差结果

Fig. 7　LAMBDA+LN Method Heading Error Results

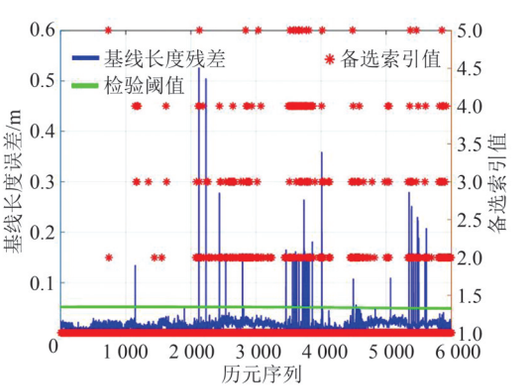


图 8　LAMBDA+LN 法状态信息

Fig. 8　LAMBDA+LN Method Status Information

表 1 中给出了 3 种不同方法在整周模糊度固定成功率、整周模糊度固定失败率、全部整周模糊度固定正确历元对应的测向误差统计结果,其中该误差已通过已知基线长度折算到单位为°/m 的结果。

对比整周模糊度固定成功率,LAMBDA+LN 法最高,相比于 LAMBDA 法提升了 3.5%,表明采用已知固定基线约束准则能够有效提升整周模糊度固定成功率,而提升整周模糊度固定成功率带来的优势在于测向结果也得到了同步提升。本文方法相比于 LAMBDA+LT 法整周模

表1 不同方法测试结果

Table 1 Test Results of Different Methods

算法	固定成功率/%	固定失败率/%	测向误差/(°·m^{-1})
LAMBDA	92.0	8.0	0.44
LAMBDA+LT	88.1	11.9	0.42
LAMBDA+LN	95.5	4.5	0.40

糊度固定成功率提升了7.4%,表明在采用已知固定基线约束准则方法时,选择最佳的检验阈值是影响测向性能的关键,如选取不当,甚至会带来负面影响,其整周模糊度固定成功率不及传统LAMBDA法,降低了3.9%。从全部整周模糊度固定正确历元误差统计结果来看,三者测向精度是相当的,其中LAMBDA+LN精度略高。该结果表明,在整周模糊度固定正确后,其高精度相位观测量精度得以恢复,三者方法表现的测向性能是一致的。从结果中可以看出,提升整周模糊度固定成功率是提升测向性能的关键,本文所提方法在整周模糊度固定成功率上具有最好的测试性能。

3 结 语

为在大众市场推广GNSS测向技术,本文以低成本GNSS接收机硬件为研发平台,以保障GNSS测向精度与可靠性为目标,借助已知固定基线长度约束信息,通过利用几何基线后验方差-协方差信息构建实时动态检验阈值,有效增加了整周模糊度解算成功率,从而提升了低成本GNSS测向的精度与可靠性。通过采用双天线低成本GNSS接收机在实际场景中采集GPS单频数据,对所提算法进行了综合测试。通过与传统方法的对比可知:与传统LAMBDA方法相比,因不限于仅判定最优解是否为固定正确解,而是扩展搜索范围为整个备选解集,因此表现出具有更好的整周模糊度固定成功率,比传统方法提升了3.5%;与传统LAMBDA+LT方法相比,由于检验阈值构建会随模型实时动态调整,避免了传统因选择经验固定值而对动态场景适应性差的弊端,其整周模糊度固定成功率较传统方法提升了7%;通过动态场景实测验证,所提方法的测向精度达到了0.40 °/m。由于低成本GNSS接收机观测量质量较低的影响,相较高性能GNSS测向接收机的0.20 °/m还存在精度差距,但已满足较多低成本导航市场的应用需求,有较大实用价值。

参 考 文 献

[1] SUN R, CHENG Q, WANG J H. Precise Vehicle Dynamic Heading and Pitch Angle Estimation Using Time-Differenced Measurements from a Single GNSS Antenna [J]. *GPS Solutions*, 2020, 24(3): 84.

[2] 蔡小波, 许厚泽, 王勇, 等. 车载三天线GNSS的直接法定姿及精度评估[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(6): 820-825.
CAI Xiaobo, XU Houze, WANG Yong, et al. Direct Attitude Determination Method Based on Vehicle-Mounted Three-Antenna GNSS and the Accuracy Evaluation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(6): 820-825.

[3] DING W, SUN W, GAO Y, et al. Carrier Phase-Based Precise Heading and Pitch Estimation Using a Low-Cost GNSS Receiver [J]. *Remote Sensing*, 2021, 13(18): 3642.

[4] TEUNISSEN P J G, GIORGI G, BUIST P J. Testing of a New Single-Frequency GNSS Carrier Phase Attitude Determination Method: Land, Ship and Aircraft Experiments [J]. *GPS Solutions*, 2011, 15(1): 15-28.

[5] LI N, ZHAO L, LI L, et al. Integrity Monitoring of High-Accuracy GNSS-Based Attitude Determination[J]. *GPS Solutions*, 2018, 22(4): 120.

[6] WANG X Z, YAO Y B, XU C Q, et al. An Improved Single-Epoch Attitude Determination Method for Low-Cost Single-Frequency GNSS Receivers [J]. *Remote Sensing*, 2021, 13(14): 2746.

[7] ODOLINSKI R, TEUNISSEN P J G. Single-Frequency, Dual-GNSS Versus Dual-Frequency, Single-GNSS: A Low-Cost and High-Grade Receivers GPS-BDS RTK Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(11): 1255-1278.

[8] LACHAPELLE G, GRATTON P. GNSS Precise Point Positioning with Android Smartphones and Comparison with High Performance Receivers[C]// IEEE International Conference on Signal, Information and Data Processing, Chongqing, China, 2019.

[9] 张小红, 陶贤露, 王颖喆, 等. 城市场景智能手机

GNSS/MEMS融合车载高精度定位[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1740-1749.
ZHANG Xiaohong, TAO Xianlu, WANG Yingzhe, et al. MEMS-Enhanced Smartphone GNSS High-Precision Positioning for Vehicular Navigation in Urban Conditions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1740-1749.

[10] YANG Y D, MAO X C, TIAN W F. A Novel Method for Low-Cost MIMU Aiding GNSS Attitude Determination[J]. *Measurement Science and Technology*, 2016, 27(7): 075003.

[11] RYCHLICKI M, KASPRZYK Z, ROSIŃSKI A. Analysis of Accuracy and Reliability of Different Types of GPS Receivers[J]. *Sensors*, 2020, 20(22): 6498.

[12] ZHU F, HU Z K, LIU W K, et al. Dual-Antenna GNSS Integrated with MEMS for Reliable and Continuous Attitude Determination in Challenged Environments[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 19(9): 3449-3461.

[13] 唐卫明, 孙红星, 刘经南. 附有基线长度约束的单频数据单历元LAMBDA方法整周模糊度确定[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2005, 30(5): 444-446.
TANG Weiming, SUN Hongxing, LIU Jingnan. Determination of Ambiguity of Single Frequency Data by Single Epoch LAMBDA Method with Baseline Length Constraint[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2005, 30(5): 444-446.

[14] MA L Y, LU L G, ZHU F, et al. Baseline Length Constraint Approaches for Enhancing GNSS Ambiguity Resolution: Comparative Study[J]. *GPS Solutions*, 2021, 25(2): 40.

[15] WU S S, ZHAO X B, ZHANG L, et al. Improving Reliability and Efficiency of RTK Ambiguity Resolution with Reference Antenna Array: BDS + GPS Analysis and Test[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(9): 1297-1311.

[16] 汤佳明, 柴艳菊, 闻德保, 等. GNSS多天线基线网单历元模糊度同步解算法[J]. 大地测量与地球动力学, 2019, 39(3): 262-268.
TANG Jiaming, CHAI Yanju, WEN Debao, et al. Algorithm of Simultaneous Ambiguity Resolution of GNSS Multi-Antenna Network for Single Epoch[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2019, 39(3): 262-268.

[17] 聂志喜, 王振杰, 欧吉坤, 等. 非线性基线长约束条件线性化近似对模糊度解算的影响[J]. 测绘学报, 2015, 44(2): 168-173.
NIE Zhixi, WANG Zhenjie, OU Jikun, et al. On the Effect of Linearization and Approximation of Nonlinear Baseline Length Constraint for Ambiguity Resolution[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(2): 168-173.

[18] LI Y, ZHAO L, JIA C, et al. Low-Cost Dual-Antenna GNSS Precision Heading Determination Method with Baseline Length Constraint[C]//China Satellite Navigation Conference, Nanchang, China, 2021.

[19] TEUNISSEN P J G. The Lambda Method for the GNSS Compass[J]. *Artificial Satellites*, 2006, 41(3): 89-103.

[20] 周晓青, 单弘煜, 卢立果, 等. 附有长度约束的模糊度解算方法比较[J]. 测绘科学, 2016, 41(6): 53-58.
ZHOU Xiaoqing, SHAN Hongyu, LU Liguo, et al. Performance Comparison Between Two Baseline Length Constraint Methods of Ambiguity Resolution[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2016, 41(6): 53-58.

[21] 贾春, 赵琳, 李亮, 等. 改正接收机频间偏差的短基线北斗三频紧组合RTK方法[J]. 中国科学: 地球科学, 2020, 50(1): 90-103.
JIA Chun, ZHAO Lin, LI Liang, et al. BDS Triple-Frequency Tightly Coupled Short-Baseline RTK Method by Calibrating the Between-Receiver Inter-Frequency Biases[J]. *Scientia Sinica (Terrae)*, 2020, 50(1): 90-103.

[22] 刘经南, 邓辰龙, 唐卫明. GNSS整周模糊度确认理论方法研究进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2014, 39(9): 1009-1016.
LIU Jingnan, DENG Chenlong, TANG Weiming. Review of GNSS Ambiguity Validation Theory[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9): 1009-1016.